

Midtoets Complexe Analyse
18/12/12, 09.00–11.00 uur

1. Definieer de functie $f(z)$ door

$$f(z) = x^2 + y^2 + 2ixy, \quad z = x + iy.$$

- (a) Bepaal waar deze functie analytisch is. Beargumenteer uw antwoord.
- (b) Bepaal waar deze functie differentieerbaar is. Beargumenteer uw antwoord.
2. Laat Γ de cirkel $|z - \pi| = \frac{1}{2}\pi$ zijn, die eenmaal in positieve richting wordt doorlopen. Voor alle $z \in \mathbb{C}$ niet op de cirkel Γ definiëren we

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\cos \zeta}{\zeta - z} d\zeta$$

en voor z op de cirkel Γ definiëren we $F(z) := 0$.

- (a) Bepaal $F(\pi)$ en $F(0)$.
- (b) Toon aan dat F continu is in $z = \frac{1}{2}\pi$.
- (c) Is F overal continu op Γ ? Leg uit.
3. Laat C de cirkel $|z| = 2$ zijn die eenmaal in positieve richting wordt doorlopen. Bereken de integraal

$$\int_C \frac{\sin z}{z^2(z-4)} dz.$$

Beargumenteer uw antwoord.

4. Laat $f(z)$ een gehele ('entire') functie zijn. Stel dat er $M \in \mathbb{R}$ bestaat zodat $\operatorname{Re} f(z) \leq M$ voor all $z \in \mathbb{C}$.
- (a) Toon aan dat de functie $g(z) := e^{f(z)}$ begrensd is.
- (b) Gebruik dit om te bewijzen dat $f(z)$ een constante functie is.

ZOZ !!

5. Beschouw de functie $f(z) = z^3 \sin 2z$

- (a) Bepaal het grootste domein D waarop deze functie analytisch is
- (b) Bepaal de Taylorreeks van $f(z)$ rond $z_0 = 0$.
- (c) Voor welke waarden van z is deze reeks convergent, en waarom?

Puntenverdeling: 1: 9 + 9, 2: 6 + 6 + 6, 3: 18, 4: 9 + 9, 5: 6 + 6 + 6. 10 punten gratis.